حل مسائل امتحانات پایانی

ریاضی ۲

۱. $۴۸=aq^۳-aq \Rightarrow aq(q-۱)(q+۱)=۲^۴\times۳$

چون a، q، q-۱ و q+۱ عددهایی طبیعی هستند، پس باید یکی از آن‌ها مساوی ۳ باشد. اگر a=۳ باشد، باید حاصل‌ضرب سه عدد متوالی q، q-۱ و q+۱ مساوی ۱۶ شود که غیرممکن است. اگر q=۳ باشد، q-۱=۲ و q+۱=۴ و a=۲ خواهد شد و اگر q-۱=۳ باشد، آن‌گاه خواهیم داشت: q=۴ و q+۱=۵ که غیرقابل قبول است. و اگر q+۱=۳ باشد، آن‌گاه داریم: q=۲، q-۱=۱ و a=۸. بنابراین دو دنباله به صورت‌های زیر وجود دارند:

۲ و ۶ و ۱۸ و ۵۴ و ...

۸ و ۱۶ و ۳۲ و ۶۴ و ...

۲. چون f تابع است و داریم: (a,b)∈f و (a,۲a-c)، پس: ۲a-c=b. چون f یک به یک است و داریم: $(a+b,a^۲)$ و $(۲,a^۲)$، پس: a+b=۲ و نیز: $f(۱)+f(۲)=a^۲+a-b=۱$. بنابراین:

$$\begin{cases} a+b=۲ \\ a^۲+a-b=۱ \end{cases}$$

$$a^۲+۲a=۳ \Rightarrow a^۲+۲a-۳=۰ \Rightarrow (a+۳)(a-۱)=۰$$

$$\Rightarrow a=۱ \quad \text{یا} \quad a=-۳$$

با فرض a=۱ خواهیم داشت: b=۱، c=۱ و $f=\{(۱,۱),(۲,۱),(۱,۰)\}$ که تابع نیست. لذا a=-۳ و در نتیجه: b=۵، c=-۱۱ و:

$$f=\{(-۳,۵),(۲,۹),(۱,-۸)\} \text{ و } f^{-۱}=\{(۵,-۳),(۹,۲),(-۸,۱)\}$$

۳. مخرج کسر همواره مثبت است (Δ<۰ و a>۰)، پس باید صورت کسر مثبت باشد:

$$\Delta=(۳m+۱)^۲-(۴m+۴)(۳m-۱)=-۳m^۲-۲m+۵<۰$$

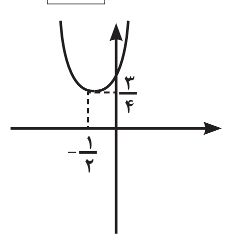
m	$-\infty$		$-\frac{۵}{۳}$		۱		$+\infty$
$-۳m^۲-۲m+۵$		−	۰	+	۰	−	

$$\Rightarrow m<-\frac{۳}{۵} \quad \text{یا} \quad m>۱$$

$$a=m+۱>۰ \Rightarrow m>-۱ \Rightarrow \boxed{m>۱}$$

۴.

$$f(x)=(x+\frac{۱}{۲})^۲+\frac{۳}{۴}$$



$D_f=R$

$R_f=\left[\frac{۳}{۴},+\infty\right]$

۵.

$$Log_y^x=\frac{Log\,x}{Log\,y} \Rightarrow Log_{۲۵}^{۰/۹}=\frac{Log\,۰/۹}{Log\,۲۵}=\frac{Log\,۹-Log\,۱۰}{Log\frac{۱۰۰}{۴}}$$

$$=\frac{۲Log۳-۱}{۲-۲Log۲}=\frac{۲b-۱}{۲-۲a}$$

۶. از قضیهٔ $a^{Log_a^x}=x$ استفاده می‌کنیم:

$$Log_۴^{۲۵}=\frac{Log۲۵}{Log۴}=\frac{۲Log۵}{۲Log۲}=Log_۲^۵ \Rightarrow Log_۴^{۲۵}-۱$$

$$=Log_۲^۵-Log_۲^۲=Log_۲^{\frac{۵}{۲}} \Rightarrow ۸^{(Log_۴^{۲۵}-۱)}=۲^{۳Log_۲^{\frac{۵}{۲}}}$$

$$=(۲^{Log_۲^{\frac{۵}{۲}}})^۳=(\frac{۵}{۲})^۳=\frac{۱۲۵}{۸}$$

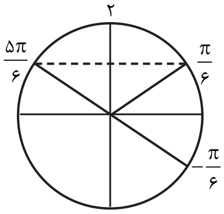
۷.

$$Log(\frac{۲x+۱}{x+۲})=Log(\frac{۳x+۴}{۴x+۳}) \Rightarrow \frac{۲x+۱}{x+۲}=\frac{۳x+۴}{۴x+۳}$$

$$\Rightarrow ۸x^۲+۱۰x+۳=۳x^۲+۱۰x+۸ \Rightarrow ۵x^۲=۵ \Rightarrow x=\pm۱$$

پاسخ x=-۱ در دامنهٔ معادله قرار ندارد و قابل قبول نیست (چرا؟) و x=۱.

۸. $\sin(\alpha+\frac{\pi}{۳})=\frac{۱}{۲}$. در دایرهٔ مثلثاتی روی محور سینوس‌ها $\frac{۱}{۲}$ واحد جدا و از آن عمودی خارج می‌کنیم و $\alpha+\frac{\pi}{۳}$ را به‌دست می‌آوریم. اکنون کافی است از آن نقطه به اندازهٔ $\frac{\pi}{۳}$ در جهت منفی حرکت کنیم تا α را به‌دست آوریم:



$$\alpha=-\frac{\pi}{۶} \quad \text{یا} \quad \alpha=\frac{\pi}{۲}$$

۹. اگر این کسر را P بنامیم خواهیم داشت:

$$P=\frac{\tan(۱۸۰+۲۰)\tan(۹۰-۲۰)-\cos(۳۶۰-۴۰)\sin(۹۰+۴۰)}{\tan(۱۸۰-۲۰)\tan(۹۰+۲۰)+\sin(۳۶۰-۱۵)\sin(۱۸۰-۱۵)+\sin(۹۰-۱۵)\sin(۲۷۰+۱۵)+\cos(۳۶۰-۴۰)\cos(۹۰-۴۰)}$$

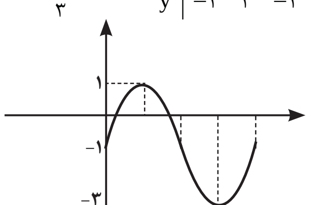
$$=\frac{\tan۲۰\cot۲۰-\cos۴۰\times\cos۴۰}{(-\tan۲۰)(-\cot۲۰)+(-\sin۱۵)\sin۱۵+\cos۱۵(-\cos۱۵)+\cos۴۰\sin۴۰}$$

$$=\frac{۱-\cos^۲۴۰}{۱-\underbrace{(\sin^۲۱۵+\cos^۲۱۵)}_{۱}+\sin۴۰\cos۴۰}=\frac{\sin^۲۴۰}{\sin۴۰\cos۴۰}=\frac{\sin۴۰}{\cos۴۰}=\tan۴۰$$

۱۰.

$$T=\frac{۲\pi}{\frac{\pi}{۳}}=۶$$

x	۰	$\frac{۳}{۲}$	۳	$\frac{۹}{۲}$	۶
y	−۱	۱	−۱	−۳	−۱



$R_f=[-۳,۱]$

۱۱. الف)

$$BC^۲=AB^۲+AC^۲-۲AB.AC.\cos A$$

$$\Rightarrow ۴۹=۲۵+۹-۳۰\cos A$$

$$\Rightarrow \cos A=-\frac{۱}{۲} \Rightarrow A=۱۲۰^\circ$$

$$\frac{AC}{\sin B}=\frac{BC}{\sin A} \Rightarrow \frac{۳}{\sin B}=\frac{۷}{\sin۱۲۰}$$

ب) $\sin 120 = \sin(180-60) = \sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin B = \frac{3\sqrt{3}}{14}$

ج) $S = \frac{1}{2}AB.AC.\sin A = \frac{1}{2}\times 5\times 3\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{4}$

۱۲. با فرض $A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ داریم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2+yz & xy+yt \\ xz+tz & t^2+zy \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x^2+yz=3 \\ y(x+t)=1 \\ z(x+t)=2 \\ t^2+zy=2 \end{cases}$$

از تقسیم دو رابطهٔ وسط بر یکدیگر (با فرض $x+t\neq 0$) به‌دست می‌آوریم: $z=2y$ و در نتیجه: $x^2+2y^2=3$ و $t^2+2y^2=2$. حال اگر $y=1$ در نظر بگیریم، خواهیم داشت: $z=2$، $x^2=1$ و $t=0$. بنابراین $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ یک جواب است و با فرض $y=\frac{1}{3}$ داریم: $t=\frac{4}{3}, x=\frac{5}{3}, z=\frac{2}{3}$ و در نتیجه: $A_2 = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$ که یک جواب دیگر است.

۱۳. $|A|=2(m+1)-(m-1)(m-2)=0 \rightarrow 2m+2-(m^2-3m+2)=0 \rightarrow m^2-5m=0 \rightarrow m=0$ یا $m=5$

۱۴. $\begin{cases} 2x=3x-3y-3 \\ 2y=3x+3y+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-3y=3 \\ 3x+y=-3 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ -\frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ -\frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} \\ -\frac{6}{5} \end{bmatrix}$$

۱۵. الف) تمام کلمات سه حرفی را منهای تعداد کلماتی می‌کنیم که شامل حرف «س» نیستند: $5\times4\times3-4\times3\times2=36$

ب) توجه می‌کنیم که حرف «ی» در آخر کلمه، بدون نقطه است:

$\boxed{3}\ \boxed{2}\ \boxed{2}$ $\quad 3\times2\times2=12$

۱۶. الف) $c(4,2)\times c(5,2)\times c(6,2)=6\times10\times15=900$

ب) برای آنکه سومی‌ها در تیم اکثریت داشته باشند، باید ۴ یا ۵ یا ۶ عضو در تیم داشته باشند، یا اینکه سه عضو در تیم داشته باشند و دومی‌ها ۲ عضو و اولی‌ها یک عضو، و یا اینکه اولی‌ها ۲ عضو و دومی‌ها یک عضو داشته باشند:

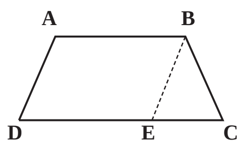
$c(6,6)+c(6,5)\times c(9,1)+c(6,4)\times c(9,2)$
$+c(6,3)\times c(5,2)\times c(4,1)+c(6,3)\times c(5,1)$
$\times c(4,2)=1+6\times9+15\times36+20\times10\times4+20\times5\times6=1995$

۱۷. $\frac{x!}{3!(x-3)!}+\frac{x!}{(x-2)!}=77 \Rightarrow \frac{x(x-1)(x-2)}{6}$
$+x(x-1)=77 \Rightarrow x(x-1)(\frac{x-2}{6}+1)=77$
$\Rightarrow x(x-1)(x+4)=6\times11\times7 \Rightarrow x=7$

هندسه ۱

۱. از روابط $\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n=250^\circ$ و $(90-\alpha_1)+(90-\alpha_2)+...+(90-\alpha_n)=290$، n را به دست آورید.
جواب: $n=6$

۲. از رأس B خطی موازی ساق AD رسم کنید و از ویژگی‌های خطوط موازی و مورب و مثلث متساوی‌الساقین استفاده کنید.



۳. با فرض $\hat{B}=\alpha$ به کمک ویژگی مثلث متساوی‌الساقین ثابت کنید: $\hat{C}=\frac{\alpha}{2}$ و با توجه به مجموع زوایای داخلی مثلث ABC نتیجه بگیرید: $\hat{B}=60^\circ$ و $\hat{C}=30^\circ$.

۴. با توجه به مجموع زوایای حاده مثلث‌های قائم‌الزاویه، نتیجه بگیرید که چهار ضلعی بزرگ هم مربع است. اضلاع مثلث‌های قائم‌الزاویه را b و c و وتر آن را a در نظر بگیرید. مساحت مربع بزرگ را از دو راه بنویسید و برابر قرار دهید و به تساوی زیر برسید و از آنجا قضیهٔ فیثاغورس را نتیجه‌بگیرید:

$$(b-c)^2+4(\frac{bc}{2})=a^2$$

۵. با توجه به فرض نتیجه می‌شود: $AH\times BH=2\times54$ و $AH\times CH=2\times6$. این دو برابری را در هم ضرب کنید و با توجه به رابطهٔ $AH^2=BH.CH$، طول AH و از آنجا طول‌های BH و CH را به‌دست آورید و نتیجه بگیرید: $BC=20$ و $AC=2\sqrt{10}$ و $AB=6\sqrt{10}$

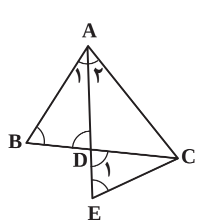
۶. دو ارتفاع را رسم کنید و با توجه به ویژگی‌های مثلث‌های قائم‌الزاویه با زاویه‌های حادهٔ 30° و 45°، طول‌های قاعده‌ها و مساحت را به‌دست بیاورید و نتیجه بگیرید:

محیط = $6(4+\sqrt{3}+\sqrt{2})$
مساحت = $8(4+\sqrt{3})$

۷. قضیهٔ کتاب درسی (صفحهٔ ۹۷).

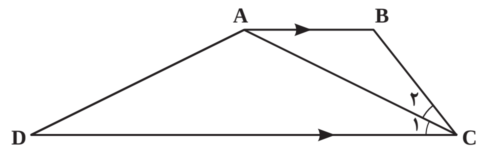
۸.

$\hat{A}_1=\hat{A}_2, \hat{E}=\hat{B} \Rightarrow \triangle AEC \sim \triangle ABD \Rightarrow \frac{AD}{AC}=\frac{AB}{AE}$
$\Rightarrow AB.AC=AD.AE \Rightarrow AB.AC=AD(AD+DE)$
$=AD^2+AD.DE$
$\hat{D}_1=\hat{D}_2, \hat{E}=\hat{B} \Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle DEC \Rightarrow \frac{BD}{DE}=\frac{AD}{DC}$
$\Rightarrow AD.DE=BD.DC \Rightarrow AD^2=AB.AC-BD.DC$



۹. $\hat{C}_1=\hat{C}_2=\hat{D}=\hat{A}_1 \Rightarrow AB=BC,\ \Delta ABC \sim \Delta ACD$

$\Rightarrow \frac{AC}{CD}=\frac{AB}{AD}=\frac{BC}{AC} \Rightarrow AC^2=BC.CD=AB.CD$



۱۰. اگر ابعاد مکعب را a، b و c در نظر بگیریم، داریم: $a^2+b^2+c^2=6$

و $2(ab+ac+bc)=12 \Rightarrow a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc=6$

$\Rightarrow 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2ac-2bc=0$

$\Rightarrow (a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2=0 \Rightarrow a=b=c=\sqrt{2}$

$\Rightarrow V=abc=2\sqrt{2}$

۱۱. با رسم ارتفاع‌های وارد بر قاعدهٔ ذوزنقه و با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس طول ارتفاع آن را مساوی ۴ به‌دست آورید و مساحت قاعده را مساوی ۴۴ نتیجه بگیرید. حجم منشور= ۴۴۰

۱۲. پای ارتفاع، نقطهٔ برخورد ارتفاع‌های مثلث متساوی‌الاضلاع قاعده است (شبیه تمرین صفحهٔ ۱۳۵ کتاب درسی). از آنجا ارتفاع و حجم را بر حسب a به‌دست آورید.

جواب: حجم = $\frac{\sqrt{3}}{12}a^3$ و زاویه = 30°.

۱۳. اگر ارتفاع استوانه را h و شعاع قاعدهٔ آن را r در نظر بگیریم، داریم: $r+h=90$. با توجه به مساحت رویهٔ کپسول نتیجه می‌شود:

$\pi r^2+2\pi rh+2\pi r^2=6300\pi \Rightarrow 3r^2+2rh=6300$

$\Rightarrow 3r^2+2r(90-r)=6300 \Rightarrow r^2+180r-6300=0$

$\Rightarrow (r+210)(r-30)=0 \Rightarrow r=30\ ,\ h=60$

$\Rightarrow v=\pi r^2h+\frac{2}{3}\pi r^3=72000\pi$

۱۴. قضیهٔ کتاب درسی (صفحهٔ ۱۴۲).

هندسه ۲

۱. دو قضیه باید اثبات شود:

الف) با فرض AB>AC ثابت شود: $\hat{C}>\hat{B}$.

ب) با فرض $\hat{C}>\hat{B}$ ثابت شود: AB>AC.

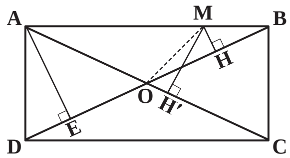
هر دو قضیه در کتاب درسی (صفحه‌های ۱۹، ۲۰ و ۲۴) اثبات شده‌اند.

۲. اگر نقطه، روی AB یا CD باشد، مطابق شکل می‌توان نوشت:

$S_{AOB}=S_{AOM}+S_{OMB} \Rightarrow \frac{1}{2}AE.OB$

$=\frac{1}{2}MH'.OA+\frac{1}{2}MH.OB$

$OA=OB \Rightarrow MH+MH'=AE$ (مقدار ثابت)



اما اگر نقطه روی AD یا BC باشد، به طریق مشابه ثابت کنید مجموع فواصل آن از دو قطر مساوی AE است.

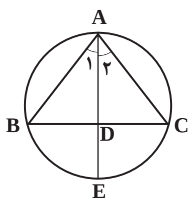
۳. مسئلهٔ کتاب درسی (صفحهٔ ۲۹).

۴. قضیهٔ کتاب درسی (صفحهٔ ۳۶).

۵. نیم‌ساز را امتداد دهید تا دایرهٔ محیطی مثلث را در نقطهٔ E قطع کند و ثابت کنید: $AD^2=AB.AC-BD.DC$

(مسئله کتاب درسی صفحه ۷۸)

اندازه‌های BD و DC را نیز به کمک قضیهٔ نیم‌سازها به دست بیاورید و از آنجا AD را بر حسب a، b و c بنویسید.



جواب:

$$AD=\frac{\sqrt{bc(a+b+c)(b+c-a)}}{b+c}$$

۶. بلندترین وتر، قطر دایره است که مساوی ۱۰ واحد است و کوتاه‌ترین وتر، وتری است که در A بر قطر عمود می‌شود و به کمک قضیه‌های کتاب درسی طول آن به سادگی مساوی $2\sqrt{21}$ به‌دست می‌آید.

۷. قضیهٔ کتاب درسی (صفحهٔ ۷۷).

۸. $L=\sqrt{d^2-(R-R')^2}=\sqrt{d^2-a^2}\ ,\ L'=\sqrt{d^2-(R+R')^2}$

$=\sqrt{d^2-9a^2} \Rightarrow \sqrt{d^2-a^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}\times\sqrt{d^2-9a^2}$

$\Rightarrow d^2-a^2=\frac{3}{2}(d^2-9a^2) \Rightarrow \frac{1}{2}d^2=\frac{25}{2}a^2 \Rightarrow d=5a$

$\Rightarrow d-(R+R')=2a$

۹. وسط AA' روی d است و شیب‌های آن‌ها عکس و قرینه است:

وسط $AA' = (\frac{m+n}{2},m)\in d \Rightarrow m=2(m+n)+7 \Rightarrow m+2n=-7$

$m_{AA'}=\frac{2}{n-m},\ m_d=4 \Rightarrow \frac{8}{n-m}=-1$

$\Rightarrow m-n=8 \qquad \begin{array}{l} \begin{cases} m+2n=-7 \\ 2\,|\,m-n=8 \end{cases} \\ \hline 3m=9 \Rightarrow m=3, n=-5 \end{array}$

۱۰. الف) اگر A و B دو نقطهٔ دلخواه روی d و A' و B' دو نقطهٔ دلخواه روی d' باشند، بردارهای AA' و BB' می‌توانند دو انتقال متمایز را بسازند.

$$A(-۱,۳),B(۵,-۱),A'(-۱,-۱),B'(۲,-۳)$$
$$\overrightarrow{AA'}=(۰,-۴),\overrightarrow{BB'}=(-۳,-۲)$$
$$T_۱(x,y)=(x,y-۴),T_۲(x,y)=(x-۳,y-۲)$$

ب)
$$L:۲x+۳y+\frac{\frac{۸-۷}{۵-۷}}{۲}=۰\Rightarrow ۲x+۳y-۱=۰$$

ج) هر نقطه روی L می‌تواند مرکز بازتاب باشد؛ مثلاً (۱ و ۱-)M

۱۱.
$$T(x,y)=(kx,ky)=(X,Y)\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{X}{K}\\ y=\frac{Y}{K}\end{cases}$$
$$x+y=۱\Rightarrow\frac{X}{K}+\frac{Y}{K}=۱\Rightarrow X+Y=K\Rightarrow K=۲$$

۱۲. مشابه مسئلهٔ کتاب درسی (صفحهٔ ۱۲۶).

۱۳. مسئلهٔ کتاب درسی (صفحهٔ ۱۳۸).

۱۴. قضیهٔ کتاب درسی (صفحهٔ ۱۴۱).

۱۵. مسئلهٔ کتاب درسی (صفحهٔ ۱۵۵).

۱۶. مسئلهٔ کتاب درسی (صفحهٔ ۱۵۸).

حسابان

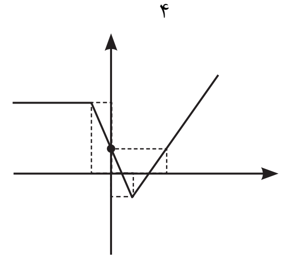
۱. جواب: ۲- یا x=-۱.

۲.
$$x=۱\Rightarrow(۲m+۱)^۷=۱۲۸\Rightarrow ۲m+۱=۲\Rightarrow m=\frac{۱}{۲}$$

۳. مساحت مثلث اول $s_۱=\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$ و شعاع دایرهٔ محاطی آن $\frac{\sqrt{۳}}{۶}a$ است. در نتیجه طول ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع دوم برابر است با: $\frac{۱}{۲}a$ و مساحت آن می‌شود: $s_۲=\frac{\sqrt{۳}}{۱۶}a^۲$. به همین ترتیب به‌دست می‌آوریم: $s_۳=\frac{\sqrt{۳}}{۶۴}a^۲$ و...

$$\text{مجموع مساحت‌ها}=\frac{s_۱}{۱-q}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲}{۱-\frac{۱}{۴}}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}a^۲$$

۴.
$$f(x)=\begin{cases}۳ & x<-۱\\ -۲x+۱ & -۱\le x<۱\\ ۲x-۳ & x\ge ۱\end{cases}$$



۵. خیر، $D_f=R-\{۰\}$ و $D_g=(۰,+\infty)$.

۶.
$$fog=\{(۱,۱),(۲,-۲),(۴,۱)\}$$
$$gof=\{(۰,۰),(-۱,۰),(۴,۰)\}$$
$$\Rightarrow fog-gof=\{(۴,۱)\}$$
$$\frac{g}{f}=\{(۱,۰),(-۱,۲),(۴,۰)\},\frac{f}{g}=\{(-۱,\frac{۱}{۲})\}$$
$$\frac{g}{f}+\frac{f}{g}=\{(-۱,\frac{۵}{۲})\}$$

۷. الف)
$$\frac{x-۲}{x+۲}>۰\Rightarrow x>۲ \text{ یا } x<-۲\Rightarrow Df=R-[-۲,۲]$$

ب) تابع f فرد است.
$$f(-x)=Log_۲\frac{-x-۲}{-x+۲}=Log_۲\frac{x+۲}{x-۲}$$
$$=-Log_۲\frac{x-۲}{x+۲}=-f(x)$$

ج)
$$\frac{x-۲}{x+۲}=\frac{x+۲-۴}{x+۲}=۱-\frac{۴}{x+۲}$$
$$x_۱>x_۲\Rightarrow x_۱+۲>x_۲+۲\Rightarrow\frac{۱}{x_۱+۲}<\frac{۱}{x_۲+۲}$$
$$\Rightarrow\frac{-۱}{x_۱+۲}>-\frac{۱}{x_۲+۲}\Rightarrow\frac{-۴}{x_۱+۲}>\frac{-۴}{x_۲+۲}$$
$$\Rightarrow ۱-\frac{۴}{x_۱+۲}>۱-\frac{۴}{x_۲+۲}\Rightarrow\frac{x_۱-۲}{x_۲+۲}>\frac{x_۲-۲}{x_۲+۲}$$
$$\Rightarrow Log_۲(\frac{x_۱-۲}{x_۱+۲})>Log_۲(\frac{x_۲-۲}{x_۲+۲})\Rightarrow f(x_۱)>f(x_۲)$$

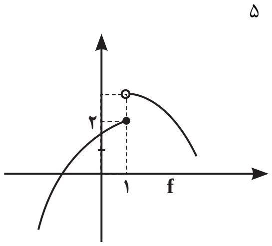
د)
$$D_{gof}=\left[-۶,-\frac{۱۰}{۳}\right]$$

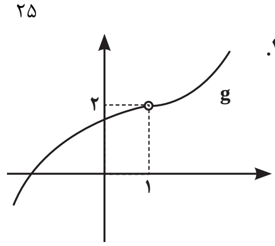
۸.
$$\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)$$
$$(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)=\sin^۲\alpha\cos^۲\beta-\cos^۲\alpha\sin^۲\beta$$
$$=\sin^۲\alpha(۱-\sin^۲\beta)-(۱-\sin^۲\alpha)\sin^۲\beta=\sin^۲\alpha-\sin^۲\beta$$
$$=(\sin\alpha-\sin\beta)(\sin\alpha+\sin\beta)$$

۹.
$$\cos x\cos ۲x(\frac{\sin ۲x}{\cos ۲x}+\frac{\sin x}{\cos x})=۱$$
$$\Rightarrow\cos x\sin ۲x+\sin x\cos ۲x=۱$$
$$\Rightarrow\sin(x+۲x)=۱\Rightarrow\sin ۳x=۱$$
$$\Rightarrow ۳x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=\frac{۲k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۶}$$

۱۰.
$$\sin^{-۱}\frac{۳}{۵}=\alpha\Rightarrow\sin\alpha=\frac{۳}{۵},\cos\alpha=\sqrt{۱-\frac{۹}{۲۵}}=\frac{۴}{۵}$$
$$\sin ۲\alpha=۲\sin\alpha\cos\alpha=۲\times\frac{۳}{۵}\times\frac{۴}{۵}=\frac{۲۴}{۲۵}$$

۱۱.





۱۲. الف

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1})(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+1})}{(\frac{\sin 2x}{2x}\times 2x)(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+1})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x^2+1)-(x+1)}{2x(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+1})}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x-1)}{2x(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+1})}=\frac{-1}{4}$$

ب

$$x=\frac{\pi}{3}+t \qquad \lim_{t\to 0}\frac{\tan(2\frac{\pi}{3}+2t)+\tan(\frac{\pi}{3}+t)}{1-2\cos(\frac{\pi}{3}+t)}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{-\sqrt{3}+\tan 2t}{1+\sqrt{3}\tan 2t}+\frac{\sqrt{3}+\tan t}{1-\sqrt{3}\tan t}}{1-2(\frac{1}{2}\cos t-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin t)}=\ldots=4\sqrt{3}$$

۱۳.

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{a(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{b(x-1)(x+1)(\sqrt{x}+1)}=\frac{a}{4b}$$

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=a-b\Rightarrow\begin{cases}\frac{a}{4b}=2\Rightarrow a=\frac{16}{7}\ ,\ b=\frac{2}{7}\\ a-b=2\end{cases}$$

۱۴.

$$f'(8)=\lim\frac{f(x)-f(8)}{x-8}=\lim_{x\to 8}\frac{\frac{1}{\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{2}}{x-8}$$

$$=\lim_{x\to 8}\frac{2-\sqrt[3]{x}}{2(x-8)\sqrt[3]{x}}=\lim_{x\to 8}\frac{(8-x)}{2(x-8)\sqrt[3]{x}(4+2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}=\frac{-1}{48}$$

۱۵.

الف) $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}.\cos^2x+(-2\cos x\sin x)\sin\sqrt{x}$

ب) $f'(x)=\frac{(-2\sin 2x)(1+\cos^2x)-2\cos x(-\sin x)(1+\cos 2x)}{(1+\cos^2x)^2}$

ج) $f'(x)=\frac{4\sin x\cos x}{\sqrt{1-(2\sin^2x-1)^2}}$

۱۶. با توجه به اینکه ارتفاع لیوان دو برابر شعاع قاعدهٔ آن است، و به کمک قضیهٔ تالس نتیجه می‌شود که آب در هر ارتفاعی که باشد، عمق آن دو برابر شعاع سطح آن خواهد بود، پس وقتی عمق آب h است، شعاع سطح آن $\frac{h}{2}$ می‌شود و حجم آن برابر است با:

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi(\frac{h}{2})^2h=\frac{\pi h^3}{12}$$

$$\Rightarrow V'=\frac{\pi h^2}{4}\Rightarrow V'(16)=64\pi$$

حل مسائل جبر و احتمال

۱.

$$n=3:1+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}<\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{31}{21}<\frac{3}{2}\qquad 62<63$$ یا

$$n=k:1+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{2^k-1}<\frac{k}{2}$$ (فرض استقرا)

$$n=k+1:1+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{2^k-1}+\frac{1}{2^{k+1}-1}<\frac{k+1}{2}$$ (حکم استقرا)

به دو طرف فرض عدد $\frac{1}{2^{k+1}-1}$ را اضافه کنید:

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{2^k-1}+\frac{1}{2^{k+1}-1}<\frac{k}{2}+\frac{1}{2^{k+1}-1}$$

و از مقایسهٔ این نابرابری و نابرابری حکم، نتیجه می‌شود که برای اثبات حکم، کافی است ثابت کنیم: $\frac{k}{2}+\frac{1}{2^{k+1}-1}\le\frac{k+1}{2}$ و یا $\frac{1}{2^{k+1}-1}\le\frac{1}{2}$ که معادل است با: $2^{k+1}-1\ge 2$ و $2^{k+1}\ge 3$ و با توجه به شرط $k\ge 3$ درستی آن واضح است و با توجه به برگشت‌پذیری همهٔ مراحل، اثبات کامل است.

۲.

$$a=5k+3$$
$$\Rightarrow a^2=25k^2+30k+9=25k^2+30k+5+4$$
$$\Rightarrow a^2=5(5k^2+6k+1)+4=5k'+4$$

۳. دو طرف نابرابری را در $\sqrt{x}.\sqrt{y}$ ضرب می‌کنیم:

$$x\sqrt{x}+y\sqrt{y}\ge x\sqrt{y}+y\sqrt{x}$$
$$\Leftrightarrow x(\sqrt{x}-\sqrt{y})+y(\sqrt{y}-\sqrt{x})\ge 0$$
$$\Leftrightarrow(\sqrt{x}-\sqrt{y})(x-y)\ge 0$$
$$\Leftrightarrow(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2(\sqrt{x}+\sqrt{y})\ge 0$$

۴. فرض می‌کنیم این عدد گویا باشد:

$$\sqrt[3]{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=\frac{m}{n},m,n\in Z,n\neq 0$$
$$\Rightarrow\sqrt{5}-\sqrt{2}=\frac{m^3}{n^3}$$
$$\Rightarrow\sqrt{5}=\sqrt{2}+\frac{m^3}{n^3}$$
$$\Rightarrow 5=2+\frac{m^6}{n^6}+\frac{2\sqrt{2}m^3}{n^3}$$
$$\Rightarrow\frac{2\sqrt{2}m^3}{n^3}=\frac{3n^6-m^6}{n^6}$$
$$\Rightarrow\sqrt{2}=\frac{3n^6-m^6}{2n^3m^3}=\frac{p}{q}$$

و چون: $m,n\in Z$ و پس: $p,q\in Z$، در نتیجه: $\sqrt{2}=\frac{p}{q}\in Q$ و این تناقض است.

۵. عددهای گنگ $2+\sqrt{2}$ و $2-\sqrt{2}$ را در نظر می‌گیریم که نه مجموع و نه حاصل‌ضرب آن‌ها هیچ یک گنگ نیستند:

$$2-\sqrt{2}+2+\sqrt{2}=4\in Q$$
$$(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})=4-2=2\in Q$$

۶. همهٔ این عددها به‌صورت $2^a.3^b$ هستند. a و b از نظر زوج و فرد بودن چهار حالت مختلف دارند: b زوج و a فرد ـ b فرد و a زوج ـ b فرد و a فرد ـ b زوج و a زوج. پس وقتی پنج عدد انتخاب کرده‌ایم، طبق اصل لانه کبوتری، لااقل دوتا از آن‌ها از نظر زوج و فرد بودن

توان‌های ۲ و ۳ مثل هم هستند. وقتی این دو عدد را درهم ضرب کنیم ($۲^a.۳^b \times ۲^{a'}.۳^{b'} = ۲^{a+a'}.۳^{b+b'}$) مجمــوع توان‌های ۲ و ۳ هر دو زوج می‌شوند و در نتیجه عدد حاصل مربع کامل است.

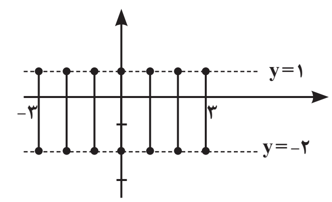
۷. نشـــان دهیـــد کـــه: $A=\{-۱,۰,۱,۲,۳\}$ و $B=\{-۱,۱,-۲,۲\}$ و در نتیجه: $A\Delta B=\{۰,۳,-۲\}$

۸.

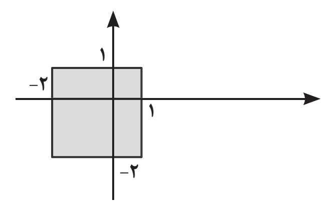
$$A-(B-C)=A\cap(B\cap C')'=A\cap(B'\cup C)$$
$$=(A\cap B')\cup(A\cap C)=(A-B)\cup(A\cap C)$$

۹. نشان دهید که: $A=\{-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳\}, B=[-۲,۱]$

و در نتیجه: $A\times B=\{(x,y)|x\in Z,-۳\le x\le ۳,y\in R,-۲\le y\le ۱\}$



$$B^۲=\{(x,y)|x,y\in R,-۲\le x,y\le ۱\}$$



۱۰.

$(x,y)R(x,y)\Rightarrow x^۲+y^۲=y^۲+x^۲$ (خاصیت انعکاسی)

$(x,y)R(z,t)\Rightarrow x^۲+t^۲=y^۲+z^۲$

$\Rightarrow t^۲+x^۲=z^۲+y^۲\Rightarrow (z,t)R(x,y)$ (خاصیت تقارنی)

$(x,y)R(z,t),(z,t)R(m,n)$

$$\Rightarrow +\begin{cases}x^۲+t^۲=y^۲+z^۲\\ z^۲+n^۲=t^۲+m^۲\end{cases}\Rightarrow x^۲+n^۲=y^۲+m^۲$$

$\Rightarrow (x,y)R(m,n)$ (خاصیت تعدی)

$(x,y)R(۱,-۱)\Rightarrow x^۲+۱=y^۲+۱\Rightarrow x^۲=y^۲$

$\Rightarrow x=\pm y\Rightarrow [(۱,-۱)]=\{(x,y)|x,y\in R,x=\pm y\}$

۱۱.

$S=\{(۱,۱,۱),(۱,۱,۲),(۱,۱,۳),...,(۱,۱,۶),(۱,۲),(۱,۳),...,$
$(۱,۶),(۲,۱),(۲,۲),...,(۲,۶),۳,۴,۵,۶\}$

$A=\{(۱,۱,۱),(۱,۱,۲),(۱,۱,۳),(۱,۱,۴),(۱,۱,۵),(۱,۱,۶)\}$

$B=\{(۱,۱,۳),(۱,۱,۴),(۱,۱,۵),(۱,۱,۶),(۱,۴),(۱,۵),(۱,۶),$
$(۲,۳),(۲,۴),(۲,۵),(۲,۶),۵,۶\}$

$A\cap B=\{(۱,۱,۳),(۱,۱,۴),(۱,۱,۵),(۱,۱,۶)\}$

۱۲. تعـــداد اعضـــای فضای نمونه عبارت اســـت از: $n(S)=\binom{۱۰}{۵}$. اما برای محاسبهٔ تعداد اعضای پیشامد تصادفی، حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

الف) همهٔ پنج مهره سیاه باشند: $\binom{۵}{۵}$

ب) یک جفت مهرهٔ هم‌شکل سیاه و سفید و ۳ مهرهٔ سیاه خارج شود: $\binom{۵}{۱}\binom{۴}{۳}$

ج) دو جفت مهرهٔ سیاه و سفید و یک مهرهٔ سیاه خارج شود: $\binom{۵}{۲}\binom{۳}{۱}$

بنابراین:

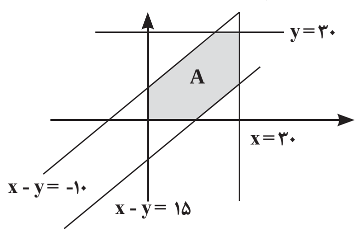
$$P(A)=\frac{\binom{۵}{۵}+\binom{۵}{۱}\binom{۴}{۳}+\binom{۵}{۲}\binom{۳}{۱}}{\binom{۱۰}{۵}}=\frac{۱۷}{۸۴}$$

۱۳.

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\binom{۱۰}{۸}+\binom{۱۰}{۹}+\binom{۱۰}{۱۰}}{۲^{۱۰}}=\frac{۵۶}{۱۰۲۴}=\frac{۷}{۱۲۸}$$

۱۴. مبـــدأ ورود را صفـــر و بازهٔ توقف قطارهـــا را [۰,۳۰] و زمان ورود قطار اول را x و زمـــان ورود قطـــار دوم را y در نظر می‌گیریم. در این صورت قطـــار اول در بازهٔ [x,x+۱۰] و قطـــار دوم در بازهٔ [y,y+۱۵] توقف دارد. در نتیجه دو قطـــار در صورتی یکدیگر را می‌بینند که: x≤y≤x+۱۰ یا y≤x≤y+۱۵. بنابراین:

$$S=\{(x,y)|۰\le x\le ۳۰,۰\le y\le ۳۰\}$$
$$A=\{(x,y)|(x,y)\in S,-۱۰\le x-y\le ۱۵\}$$



$$P(A)=\frac{S_A}{S_S}=\frac{۳۰\times ۳۰-\frac{۱۵\times ۱۵}{۲}-\frac{۲۰\times ۲۰}{۲}}{۳۰\times ۳۰}=\frac{۴۷}{۷۲}$$

۱۵.

$P(۲)=P(۳)=P(۵)=۳P(۱)=۳P(۴)=۳P(۶)=۳x$

$P(۱)+P(۲)+...+P(۶)=۱\Rightarrow ۱۲x=۱,x=\frac{۱}{۱۲},$

$P(۱)=P(۴)=P(۶)=\frac{۱}{۱۲},P(۲)=P(۳)=P(۵)=\frac{۱}{۴}$

$P(x<۴,y<۴)=P(x<۴)\times P(y<۴)$
$=(P(۱)+P(۲)+P(۳))\times(P(۱)+P(۲)+P(۳))$
$=\frac{۷}{۱۲}\times\frac{۷}{۱۲}=\frac{۴۹}{۱۴۴}$

۱۶. الف)

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=\frac{[\frac{۱۰۰}{۵}]}{۱۰۰}-\frac{[\frac{۱۰۰}{۳۰}]}{۱۰۰}=\frac{۱۷}{۱۰۰}$$

ب) این پیشـــامد متمم پیشامد آن اســـت که این عدد مضرب ۴، ۵ یا ۶ باشد.

$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)$
$-P(A\cap C)-P(B\cap C)+$
$P(A\cap B\cap C)=\frac{۲۵}{۱۰۰}+\frac{۲۰}{۱۰۰}+\frac{۱۶}{۱۰۰}-\frac{۵}{۱۰۰}-\frac{۸}{۱۰۰}$
$-\frac{۳}{۱۰۰}+\frac{۱}{۱۰۰}=۰/۴۶$
$\Rightarrow P(A\cup B\cup C)'=۰/۵۴$